Afinación pitagórica: Problemas y soluciones

Por: Juan Carlos Graus, Alejandro Custardoy y Diego Viver

23 de noviembre de 2018

Índice

Parte I

Origen filosófico del sistema de afinación pitagórico

1. ¿Quién fue?

Pitágoras no fue solo lo que relacionamos como un matemático, fue uno de los grandes iniciados de la historia y un renovador absoluto de una nueva manera de entender la relación del hombre con su dimensión espiritual; aparte de aportar a la historia los términos matemáticas y filosofía. En la historia de la filosofía, se conoce a Pitágoras como un simple filósofo presocrático, pero el mismo Platón es en gran medida un filósofo neopitagórico (pensamiento plasmado en su obra el Timeo) pues se formó con los neopitagóricos.

La idea actual de Pitágoras es una idea reforzada de un maestro hipotético del que se construye una vida que acredita un movimiento espiritual que tuvo lugar en el corazón de la magna Grecia en el siglo VI a.C

La propia formación de Pitágoras es sospechosamente impecable, dado que sus biografías fueron escritas a partir del siglo primero de nuestra era, y cuando alguien en esos siglos mira para atrás y quiere construir un personaje maravilloso que quiere que sea el más sabio de la historia, selecciona los grandes núcleos de pensamiento de la antigüedad. Casualmente Pitágoras, de la isla de Samos en Asia menor, se va a Mileto, donde conoce a Anaximandro y a Tales de Mileto, el cual le dice que tiene que visitar Egipto y hacerse sacerdote geómetra; y así lo hizo. Se va a Tebas, y ya en Heliópolis, recibe una iniciación durante 7 años y se hace sacerdote geómetra; es decir, adscrito al dios Dyehuty (Tot en griego), el dios que enseña los números y las letras a los hombres. Allí aprende el famoso teorema de Pitágoras y desarrolla su actividad como sacerdote geómetra replicando la creación del universo a través del número, pero debido a una invasión de los babilonios se lo llevan a Caldea y allí aprende matemática, cálculo, astronomía y la relación con los astros.

Al volver a su isla después de muchos años, y después de semejante trayectoria, se pelea con el tirano local y se exilia a Delfos, donde recupera el culto délfico. Después de ese currículo intachable (e imposible, de ahí que se le considere un mito), vuelve a Grecia y funda una hermandad, la famosa hermandad pitagórica. Se basaba en la trasmisión de unos conocimientos secretos a unos iniciados con aptitudes, donde se castigaba contar dichos conocimientos a personas ajenas a la hermandad. Fueron una manera de entender la sociedad, una comunidad en toda regla. Una de sus funciones era gobernar a los pueblos. Quisieron ser un nuevo orden social basado en el conocimiento espiritual y controlaron numerosas polis. Esto acabó en tragedia, fueron perseguidos y quemados en la matanza del Metaponto (ca. 475 a.C) y no se sabe que fue de Pitágoras. Muchos pitagóricos rompieron el juramento de silencio de la hermandad, así es como sabemos de los conocimientos de Pitágoras. Pitágoras es inspirador de grandes movimientos posteriores, se habla de Pitágoras como un ser medio divino con unas capacidades extraordinarias. Se cuenta de él que sabía de sus vidas anteriores, que podía estar en varios lugares a la vez, etc. La gran aportación de la geometría pitagórica es el número, en griego aritmós.

2. Pitágoras y los números

A Pitágoras se le atribuye la frase "todo fue hecho según el número"; para la hermandad pitagórica las divinidades eran los números, herramientas con las que alcanzar la trascendencia, el vínculo entre los mortales y los dioses. Para los pitagóricos, los números son las dinámicas con las que el Creador ha hecho el universo, que es una unidad que se ha fragmentado en infinitos partes las cuales se han agrupado de forma ordenada (cosmos). Los pitagóricos buscan conocer ese orden que se ha conseguido a través de los números. Si se investiga, profundiza y se alcanza interpretar lo que es un número, se alcanzará la sensación de regreso a la unidad, al principio.

La tetrarquis pitagórica son los cuatro primeros números naturales: el uno, el dos, el tres y el cuatro. La suma de estos cuatro números da diez, el número de la perfección para los pitagóricos. La divina tetrarquis son los números de la naturaleza con los que se llega a todas las demás cosas.

Los números son los símbolos por excelencia, pues no solo son cuantitativos, si no cualitativos: los números representan ideas. Los cuatro primeros números, en la filosofía pitagórica, tienen significados concretos pero abstractos en sí mismos:

- El uno representa la unidad absoluta, el conjunto de todas las cosas es un todo, (siendo el cosmos la unidad fragmentada) representa el infinito, el principio.
- El dos representa la elección, prescindir, o una cosa o la otra, la dualidad, los opuestos, el conflicto. Siempre se busca regresar a la unidad, al orden.
- El tres es el equilibrio, la relación entre el conflicto, la solución; es el vínculo, lo que une al dios y al hombre. Se vuelve a la unidad, a la forma (polígonos).
- El cuatro es la estabilidad, la Tierra, la materia, lo creado, lo concreto, lo sensible, lo mensurable, la posición (como son puntos cardinales), la unión de los opuestos, los sólidos y los elementos.

3. La música, el regreso al orden

Los pitagóricos a parte de gobernar regiones enteras, ejercían la curación, curar la enfermedad. La enfermedad es un desorden de alguna dimensión, lo primero que es necesario para curar es considerar qué es un hombre y de qué se compone para poder ordenarlo. Lo contrario del cosmos es el caos, posiblemente la unidad absoluta puesno ha sido fragmentada. Una enfermedad es caer en el caos, es volver al origen de una manera brutal que es la muerte. Al enfermo hay que devolverle al cosmos. Los pitagóricos curaban a través de un concepto que se llama la mímesis, es decir, la exposición puntual del enfermo a un orden cósmico, ordenado, numérico. El ejercicio curativo de Pitágoras fue a través de los números, que los aplicaba con la manifestación más directa, potente y trascendente del número, la música.

El paradigma de la música de las esferas dicta que la existencia de cuerpos celestes en movimiento debe crear algún tipo de sonido, y que la combinación del sonido de todos los astros orbitando genera la armonía o música de las esferas, que es a lo que nosotros llamamos silencio. No es una ausencia de sonido, sino un sonido que está siempre, y cuando se anulan los demás, es lo que se escucha. Por eso a Pitágoras se le conoce como el hijo del silencio. Los pitagóricos adoraban el silencio porque es la manifestación más elemental del orden con el que se ha hecho el mundo. El enfermo tiene que alcanzar escuchar el silencio; pero ha perdido el silencio, primero tiene que conocer los números, y más que los números, las relaciones que hay entre ellos, que son las que han dado el orden. Las relaciones entre los números, la música, son pasos intermedios para que el enfermo conozca de nuevo el orden.

Parte II

Origen de la escala a partir de las proporciones de Pitágoras

4. Introducción matemática

La escuela de Pitágoras, en su obsesión con encontrar proporciones perfectas en todos lados, no podían ignorar el fenómeno de la música. Ésta además estaba estrechamente ligada con las ciencias y las matemáticas en la Grecia Antigua. Estaban especialmente interesados en el estudio de la *canónica* o la ciencia del estudio de los intervalos musicales. Estos estudios los realizaban mediante el uso de sencillos instrumentos de una cuerda, llamados debido a esto *monocordios*. Dividiendo la cuerda en partes iguales, siguiendo proporciones de números naturales pequeños, se obtenían sonidos nuevos, algunos de los cuales, sonaban «bien» juntos

Llamaremos a la frecuencia de vibración de la cuerda (usando la letra griega ν), usando la terminología moderna, a la cantidad de veces por segundo que la misma bate, sabemos del estudio de los *Movimientos armónicos simples* extendidos a una cuerda, que la frecuencia de vibración es

$$\nu = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Donde las letras serán:

- v: Velocidad de propagación de la onda en la cuerda, o cuanto tiempo tarda un pico o valle en avanzar una distancia determinada.
- L: Longitud de la cuerda.
- T: Fuerza tensil a la que está sometida la cuerda
- μ: Densidad lineal de la cuerda, o «masa por unidad de longitud».

Nos centraremos en la longitud, ya que esta es la única variable con la que jugaban los Pitagóricos.

Como podemos ver en la fórmula anterior, la frecuencia es *inversamente proporcional* a la longitud, lo que significa que, si disminuimos la longitud en un factor n, la frecuencia aumentará por el mismo factor n. Pitágoras, además descubre que estos sonidos que suenan «bien» juntos, o consonantes, siguen proporciones $(n+1) : n$ y $n : 1$ con n un número natural pequeño, del orden del 2 al 9. Esto, además entra dentro de su filosofía de el universo armonioso gobernado por los números.

Si tenemos dos frecuencias de vibración ν_1, ν_2, la interválica, en términos actuales, entre estos dos sonidos en función de la proporción ν_1/ν_2 es como sigue:

	Unísono	8ª	5ª	4ª	3ª Mayor	3ª menor	6ª Mayor	6ª menor
ν_1/ν_2	1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$

Cuadro 1: Tabla de frecuencias e interválica

$$\begin{array}{ccccccccccc} \nu_1 & \longrightarrow & \frac{\nu_1}{2} & \longrightarrow & \frac{\nu_1}{3} & \longrightarrow & \frac{\nu_1}{4} & \longrightarrow & \frac{\nu_1}{5} & \longrightarrow & \frac{\nu_1}{6} \\ \text{Fund} & & 8^{\text{a}} & & 5^{\text{a}} & & 8^{\text{a}} & & 3^{\text{a}}\text{M} & & 5^{\text{a}} \end{array}$$

Figura 1: Serie de Armónicos

5. Serie de armónicos y consonancia

Hasta el siglo XIX, con Helmholz y su libro *On the sensations of tone* no se llega a una explicación fisico-matemática satisfactoria de por qué un sonido suena «bien». Partimos de la serie de armónicos de un sonido de frecuencia ν_1: Decimos, según Helmholz, que un sonido $\nu_2 > \nu_1$[1] si los armónicos de orden proporcional a 3, es decir, aquellos en los que dividimos por 3, 6, 9, etc, del sonido más grave (ν_1) coinciden con los de orden proporcional a 2 (2, 4, etc) del más agudo.

Poniendo como ejemplo la quinta pitagórica:

$$\nu_2 \text{ es la quinta de } \nu_1 \text{ si } \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \nu_1 = \frac{3}{2}\nu_2$$

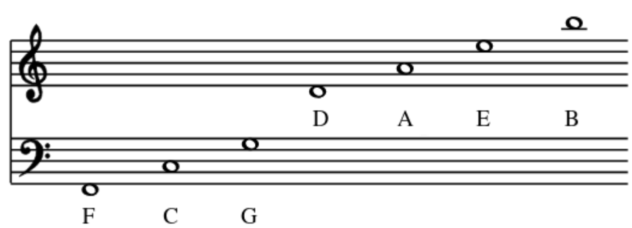
Entonces, tomando la serie de armónicos de ν_1, ver la figura anterior:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \nu_1 & \longrightarrow & \frac{1}{2}\nu_1 & \longrightarrow & \llbracket\frac{1}{3}\nu_1\rrbracket & \longrightarrow & \frac{1}{4}\nu_1 & \longrightarrow & \frac{1}{5}\nu_1 & \longrightarrow & \llbracket\frac{1}{6}\nu_1\rrbracket & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \cdots \\ \frac{3}{2}\nu_2 & \dashrightarrow & \frac{3}{4}\nu_2 & \dashrightarrow & \llbracket\frac{1}{2}\nu_2\rrbracket & \dashrightarrow & \frac{3}{8}\nu_2 & \dashrightarrow & \frac{3}{10}\nu_2 & \dashrightarrow & \llbracket\frac{1}{4}\nu_2\rrbracket & \end{array}$$

Fijándonos en los elementos recuadrados, vemos que esta teoría se cumple en este ejemplo.

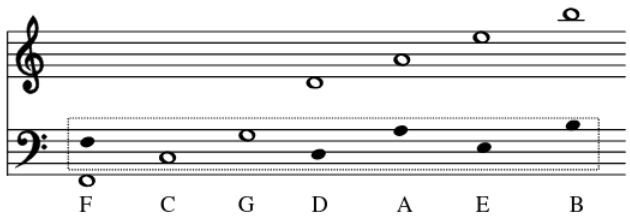
6. Escala Pitagórica:

La escala pitagórica consiste de siete sonidos obtenidos por encadenamiento de quintas, lo cual quiere decir que, partiendo de un sonido, multiplicamos su frecuencia por $3/2$, sucesivamente:



[1](con el signo $>$ marcamos que es más agudo al ser su frecuencia mayor)

Ahora, reorganizamos bajando de octava los sonidos más agudos (multiplicando por $1/2$ una o varias veces) para que todos los sonidos estén el la misma octava, obteniendo así:



Si ahora tomamos como referencia la frecuencia de Do, ν_C, tendremos:

$$\begin{aligned}
\nu_F &= \tfrac{4}{3}\nu_C \\
\nu_G &= \tfrac{3}{2}\nu_C \\
\nu_D &= \tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\nu_C = \tfrac{9}{8}\nu_C \\
\nu_A &= \tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\nu_C = \tfrac{27}{16}\nu_C \\
\nu_E &= \tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\nu_C = \tfrac{81}{64}\nu_C \\
\nu_B &= \tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\nu_C = \tfrac{243}{128}\nu_C
\end{aligned}$$

Al ordenar por intervalos, descubrimos que tenemos dos tipos de intervalos, definidos como la proporción ν_n/ν_{n-1}:

$$\nu_C \xrightarrow{9/8} \nu_D \xrightarrow{9/8} \nu_E \xrightarrow{256/243} \nu_F \xrightarrow{9/8} \nu_G \xrightarrow{9/8} \nu_A \xrightarrow{9/8} \nu_B \xrightarrow{256/243} \nu_{C'}$$

Los intervalos serán:

- Tono: $9/8 = 1'125$
- Hemitono: $256/243 \approx 1'05349...$

Podemos hacer dos observaciones desde aquí:

1. De Do a Mi hay una tercera mayor, que según nuestra tabla de antes, corresponde a una proporción de $5/4 = 80/64$, sin embargo, mediante las quintas encadenadas, tenemos que la proporción es de $81/64$, lo cual es poco mayor, pero aún así, la diferencia es audible.
2. Dos hemitonos seguidos no dan un tono:

$$(256/243) \cdot (256/243) = 1'1098... \neq 1'125$$

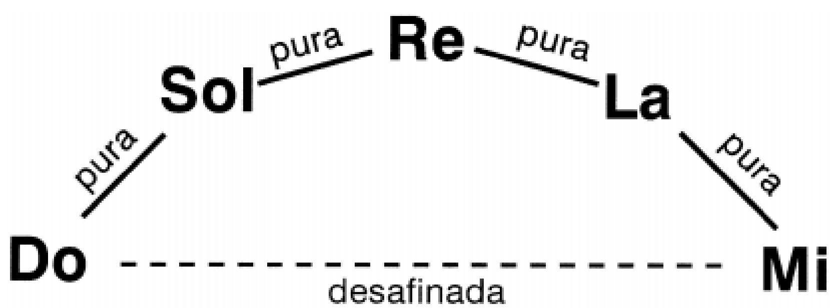
Parte III

Problemas de la gama Pitagórica como sistema de afinación

Como ya ha sido mencionado, en este sistema se utilizan las quintas como medida de afinación.

Así pues, si quisiéramos llegar a un Mi tendríamos que contar 4 quintas a un Do, además de rebajar más tarde 2 octavas (Do-Sol-Re-La-Mi).

Entre Do y Mi hay una tercera mayor, sonido consonante en nuestro sistema actual. En cambio, usando las 4 quintas más el Do tenemos un total de (1,5x1,5x1,5x1,5) / (2x2) = 1,265, que es un intervalo disonante en términos de frecuencia. La diferencia pues, resulta en algo aproximadamente igual a un quinto de un semitono; diferencia la cuál es llamada coma sintónica.



Aquí podemos ver el resultado de tocar una tercera mayor usando este sistema.

Esto no solo cambia la armonía y la relación de los sonidos -consonantes y disonantes- si no que altera también algunos instrumentos.

Principalmente, los instrumentos de viento con afinación fija son los que más afectados se ven.

En el caso de una trompeta, que utiliza 3 pistones para crear todas las notas, sería imposible tocar una tercera mayor "pura" o afinada si usásemos este sistema. Sin embargo, por difícil de calcular que resulte, más de una nota puede ser tocada con más de una combinación de pistones. Por supuesto, la frecuencia de ambas notas nombradas de misma manera será distinta. Esto nos lleva a deducir que, si usamos un sistema de quintas puras, no podríamos obtener la misma frecuencia y, por tanto, el intervalo muy posiblemente será disonante.

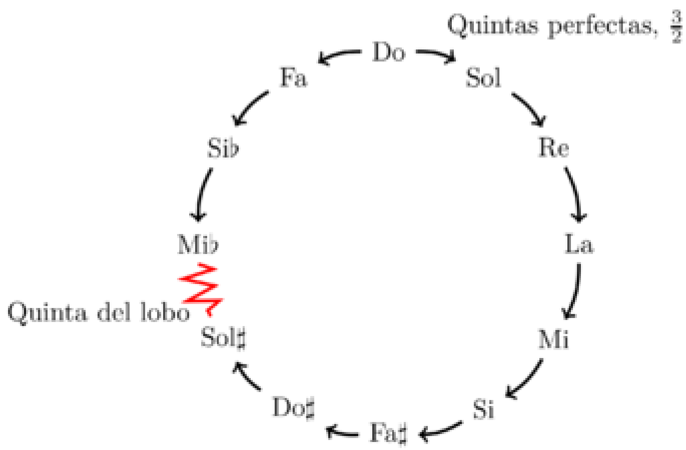
Estos problemas también son vistos en los teclados hasta el uso de la gama temperada. Algunos de ellos, usaban teclas distintas dependiendo del sonido proveniente, para conseguir limitar esa desafinación producida.

7. La quinta del lobo

Al completar el círculo de quintas puras y recomenzarlo, obtendremos una nota ligeramente más alta de la frecuencia equivalente a la octava en la que habíamos empezado.

Para solucionar esto, el sistema Pitagórico “recorta” la distancia entre una de sus quintas para igualar la nota que al recomenzar sería distinta (Do).

La quinta elegida es la que se encuentra entre los sonidos Sol# y Mib. Estos sonidos son elegidos dado su “poco uso”



Círculo de quintas con la quinta del lobo (Sol# y Mib)

Parte IV
Soluciones y sistemas alternativos

Como ya hemos podido ver, el sistema pitagórico tiene problemas al usarlo para construir una escala, por esto, existen tipos de escalas alternativos para arreglar estos problemas:

8. La escala natural

Al surgir la necesidad de incorporar varios sonidos simultáneos en la música, en principio, se hacía al unísono, pero esto no siempre es posible, así que se empezaron a utilizar intervalos que «sonaban bien» como:

- La octava (relación 2:1)
- La quinta (relación 3:2)
- La cuarta (relación 4:3)

Por tanto, la escala natural surge de manera que la mayor cantidad posible de superposiciones de sonidos resulte «agradable», por lo que el criterio de construcción de la escala es el de *consonancia*.

Las consonancias disponibles son las de la tabla 1 en la página 6. En una obra compuesta de forma polifónica, nuestro objetivo es el de conseguir el mayor número de superposiciones consonantes. En la escala de Pitágoras, tenemos octavas, quintas y cuartas *acústicamente perfectas,* pero, como ya hemos mencionado antes, en la observación 1 en la página 7, el intervalo de Do a Mi, que debería ser una tercera mayor, está ligeramente desafinado, por un factor llamado *coma de Didymus* que es un pequeño intervalo de alrededor de $1/10$ de tono.

Por tanto, procederemos a tomar la escala, en vez de por encadenamiento de seis quintas, utilizaramos solo tres, lo cual genera solo cuatro notas (Fa-Do-Sol-Re), y luego rellenamos las notas que faltan utilizando terceras mayores perfectas. Con esto obtenemos:

$$\nu_C \xrightarrow{9/8} \nu_D \xrightarrow{10/9} \nu_E \xrightarrow{16/15} \nu_F \xrightarrow{9/8} \nu_G \xrightarrow{10/9} \nu_A \xrightarrow{9/8} \nu_B \xrightarrow{16/15} \nu_{C'}$$

Si hiciésemos como Pitágoras y valorásemos la «simplicidad» de las proporciones, $16/15$ es mucho más simple que $256/243$, pero, ahora hemos introducido un nuevo problema, ya no tenemos solo dos tipos de intervalos (tonos y hemitonos), ahora tenemos tres:

- Tono mayor (T): $9/8$
- Tono menor (t): $10/9$
- Semitono (s): $16/15$

Lo cual nos dejaría una escala de la siguiente forma:

$$C \xrightarrow{\quad T \quad} D \xrightarrow{\quad t \quad} E \xrightarrow{\quad s \quad} F \xrightarrow{\quad T \quad} G \xrightarrow{\quad t \quad} A \xrightarrow{\quad T \quad} B \xrightarrow{\quad s \quad} C'$$

Esto nos resulta en que la sucesión de un tono mayor y uno menor resulta en una tercera mayor de pitágoras. Sin embargo, por ejemplo la distancia de un Re a un La, que debería de ser una proporción de $3/2$, lo cual, aunque impreciso, sigue siendo más tolerable que el error de la tercera en la escala pitagórica sin modificar, al ser diez veces menor.

9. La Escala temperada

Los dos métodos anteriores de generación de escalas parten de encadenar quintas, otra forma de hacerlo, más ingeniosa y a la vez simple, es tomar y distribuir el error de forma igual. Tomando la subida de las 12 quintas, subimos 2 octavas, por tanto dividimos esta distancia en partes iguales, llamaremos k al valor que queremos calcular para la quinta, entonces, subir doce quintas (multiplicar por k doce veces, o por k^{12}) ha de ser igual que subir siete octavas (multiplicar por 2^7):

$$k^{12}\nu = 2^7\nu \Leftrightarrow k^{12} = 2^7 \Leftrightarrow k = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7$$

Al tomar una quinta, tendremos:

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 1'4983...$$

Lo cual tendría un error *12 veces menor* que el, ya aceptable, de la escala natural.

Ahora, como dentro de una quinta caben 7 «huecos» (por ejemplo Do-**Do#-Re-Re#-Mi-Fa-Fa#-Sol**), dividiremos de forma igual esta distancia, llamandola semitono:

$$s^7 = \sqrt[7]{k} = \sqrt[12]{2}$$

La escala conseguida con este método se denomina, *escala uniformemente temperada*. Y tiene una estructura más similar a la pitagórica, sustituyendo el hemitono por este semitono que cabamos de generar. A dos semitonos seguidos, los llamaremos tono:

$$s = \sqrt[12]{2}$$

$$T = \left(\sqrt[12]{2}\right)^2$$

La tercera mayor estará formada por 4 semitonos:

$$MT = \left(\sqrt[12]{2}\right)^4$$

Lo cual difiere en menos de un 1 % al valor pitagórico, un error prácticamente imperceptible.

Bibliografía

- *La música de las esferas: de Pitágoras a Xenakis... y más acá*, Federico Miyara
- *La Divina Geometría*, Jaime Buhigas
- *El imposible cometido de afinar una trompeta*, Ivásn Martí-Vidal
- *Las fracciones de la música*, Pedro Puig Adam
- *El temperamento musical ayer y hoy*, Claudio Di Véroli